埼玉県公害センター研究報告〔16〕60～66（1989）

領域外モードの推定によるシステム同定法の研究

白石　英孝

要　　旨

測定対象周波数領域の外側にあるモード（領域外モード）のモーダルパラメータを抽出し，測定点数と測定されたモード数とを一致させて，システム同定を行う手法を開発した。

本手法は，逐次シンプレックス探索法によって推定された領域外モードの初期値をもとに領域内外モードのカーブフィットを行い，モーダルパラメータを抽出するものであり，数値シミュレーションによる検討を行った結果，良好なシステム同定を行いうることが確認された。

1　緒　　言

各種機械の低騒音・低振動化については，従来から様々な試みがなされてきたが，住工混在型，家屋密集型のわが国都市環境内において，現在までのところ十分な成果が得られているとは必ずしも言い難い状況にある。しかしながら，近年家電製品を中心に急速な低騒音・低振動化が進められ，その傾向は産業用機器にも及びつつある。

その原因として，まず第一に，製品輸出を大きな柱とするわが国産業界が諸外国に対する自社製品の競争力をつけるために，輸出製品自体を低騒音・低振動化する必要にせまられたことがあげられる。これは，わが国の騒音・振動規制が敷地境界上での許容限度によってなされているのに対し，欧米諸国では発生源自体の騒音・振動発生量が評価や規制の大きな目安になっているとの事情によるものと考えられる。

第二の原因としては，生活環境に対するわが国の社会認識の変化により，低騒音・低振動型という呼称が製品のセールスポイントになりつつあることが考えられる。こうした状況は騒音振動公害の未然防止という観点から，たいへん喜ばしいものといえよう。

これらとは別に，近年における各種解析方法の開発及び高精度化も低騒音・低振動化の大きな原因になっていると考えられる。すなわち，新たな解析技術あるいは応用技術の開発により，従来困難であった機械の動特性や騒音放射性状の把握が比較的簡便かつ高精度に行えるようになり，これが低騒音・低振動化を実現し，促進しているものと考えられる。

当所でも新しい騒音・振動解析技術のうち，特に実験モーダル解析については，数年前からその利用を進め，家屋の振動特性調査や低周波音の発生機構調査に用いるとともに，応用技術の検討，開発を行ってきている。近年着目しているのはシステム同定法[1),2)]であるが，これは機械あるいは構造物の加振実験を行うことにより，対象物の運動方程式を記述するための特性行列（質量，剛性，減衰）を求めようとするものである。ひとたび対象物の運動方程式が得られると，構造変更予測等のシミュレートを容易に実行しうるようになり，対象物の騒音・振動対策を検討する上できわめて効果的な解析手法であると考えられる。しかしながら，現在までに提案されている種々のシステム同定法[3)]では機械・構造物の動特性を表現するのに必要な測定点の数と実験によって得られるモード数との間に大きな違いがあるため（前者のほうがはるかに多い），システム同定法によって得られた特性行列の次元は測定されたモードの数に縮小されることになり，また計算も複雑なものにならざるを得ない状況にある。

そこで今回，測定対象周波数領域の外側のモードのモーダルパラメータを推定することにより，測定点の数とモード数とを一致させてシステム同定を行う新しい同定手法を開発し，数値シミュレーションによる基礎的な検討を行った。

その結果良好なシステム同定を行えることが確認されたので報告する。

2　解析方法

本稿で提案する方法の特徴は，従来のシステム同定法が，測定された伝達関数からの直接同定であったのに対し，測定対象周波数領域内のモード（以下，領域内モードと呼ぶ）及び測定対象周波数領域の外側のモード（以下，領域外モードと呼ぶ）に対して同時にカーブフィットを行い，その結果得られた測定点の数に等しいモーダルパラメータを用いて同定を行う点にある。カーブフィットについてはすでに様々な手法が開発されており，当所でもそのうちのいくつかを保有しているが，解析用コンピュータ上で作成されているのが比例粘性減衰を仮定した偏分反復法のみであるため，ここではカーブフィットに偏分反復法を用いることとした。

通常のカーブフィットでは，領域外モードを近似項によって考慮しているが，本手法ではパラメータ抽出の対象となるモードの数を測定点の数に一致させるために，領域外モードをも正しい伝達関数形でカーブフィットすることになり，領域外モードの取り扱い方が通常の方法と若干異なることになる。また，周知のとおり，偏分反復法では固有振動数及び減衰比の初期値が必要であり，初期値の良否によって解が収束しない場合がある。そこで何らかの方法で領域外モードの初期値を決定してやらなければならない。

こうしたことから，本節では，まず通常のカーブフィットと本手法でのカーブフィットとの領域外モードの取り扱い方の違いを概説し，次にカーブフィットに用いる初期値の決定方法を述べ，最後にシステム同定法を示すこととする。

2・1　カーブフィット

図１のような４つのモードをもつ伝達関数を例として用いることにする。なお減衰は比例粘性減衰を仮定する。実験モーダル解析における多自由度系伝達関数は１自由度系伝達関数の和として次のように表される。

$$G(\omega_i)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1/K_r}{1-(\omega_i/\Omega_r)^2+2j\zeta_r(\omega_i/\Omega_r)} \quad (1)$$

ここで，ω_i は角振動数，$G(\omega_i)$ はコンプライアンス，n はモード数，Ω_r，ζ_r，K_r はそれぞれ第 r 次モードの固有角振動数，減衰比，等価剛性である。

式(1)は図１の伝達関数が図２に示されるように４つの１自由度系伝達関数に分離されることを意味している（ただし，図２は各伝達関数を絶対値で表示している）。

さて，一般の伝達関数測定においては，モードが特定の帯域に集中していたり，あるいは測定系の周波数特性等により，測定対象とする周波数領域が制限されているのが普通である。ここで図２の４つの１自由度系伝達関数のうちモード２，３を測定対象周波数領域（20－100Hz）内のモード（領域内モード）とし，モード１，４を測定対象周波数領域外のモード（領域外モード）とすれば，測定された伝達関数（領域内）には領域外モードの影響（図中破線）が混入していることになる。通常のカーブフィット手法では領域外モードの影響を次の形で近似している。

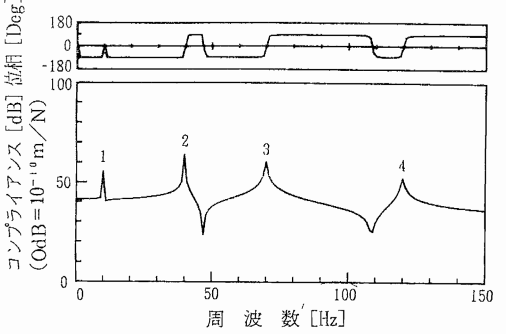


図１　４自由度伝達関数

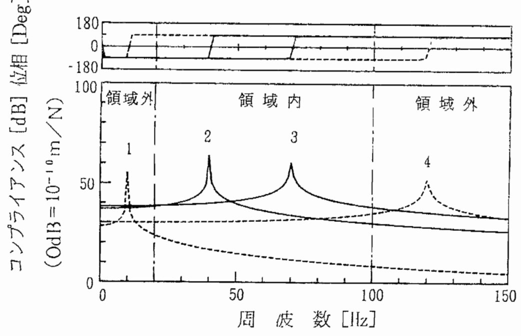


図２　４自由度伝達関数の分離（絶対値表示）

$$G(\omega_i)=\sum_{r=1}^{m}\frac{1/K_r}{1-(\omega_i/\Omega_r)^2+2j\zeta_r(\omega_i/\Omega_r)}$$

$$-1/S/\omega_i^2+1/Z \qquad (2)$$

ここで，mは領域内モードの数，$-1/S/\omega_i^2$は慣性拘束（低域側領域外モードの影響），$1/Z$は剰余コンプライアンス（高域側領域外モードの影響）である。

従って図２の例では，測定された伝達関数に対する領域外モードの影響はモード１が$-1/S/\omega_i^2$，モード４が$1/Z$として近似されることになる。

式(2)を用い，測定対象周波数領域を20－100Hzとして図１の伝達関数にカーブフィットを行った結果を図３に示す。この図から伝達関数の谷の部分では，領域外モードを近似項で表したことに起因するずれが生じているものの，ピーク部分ではよく一致していることがわかる。通常のカーブフィットではこれで実用上十分な精度が得られたことになるが，その反面，得られるモーダルパラメータは領域内モードに関するものに限られることになる。

さてシステム同定における最大の問題点は，測定によって得られるモードの数が測定点の数よりもはるかに少ない点にあった。その原因はこれまでの同定手法が，測定された伝達関数からの直接同定を主体とし，しかも測定された伝達関数に含まれる領域外モードの影響を特に考慮していないことにあると考えられる。一方通常のカーブフィット手法においても計算の効率化をはかるために先に示したように（式(2)），領域内モードだけを正しい伝達関数形で曲線適合し，領域外モードは近似的にのみ取り扱われている。しかしながら，実際には，測定された伝達関数に含まれる領域外

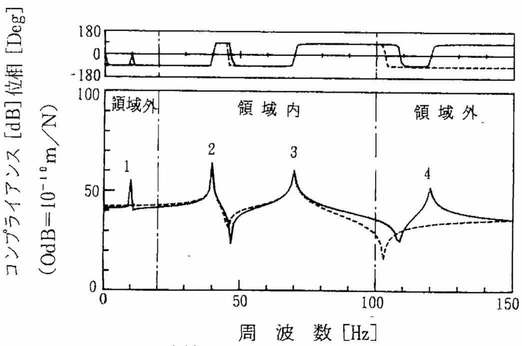


図３　領域内モード（２，３）へのカーブフィット結果

モードの影響は領域外モードの物理特性を正確に反映しているため（図２），領域外モードに対しても正しい伝達関数形でカーブフィットを実行すれば，測定点数に等しい数のモードのモーダルパラメータを抽出することは可能であると考えられる。

2・2　初期値の決定方法

本稿では比例粘性減衰を仮定した偏分反復法によってカーブフィットを行うが，計算を行うためには，ある程度正確な初期値（特に周波数）が必要になることから，本節では初期値の決定方法について示すこととする。

初期値は領域内モード及び領域外モードともに必要であり，このうち前者については各モードの周波数が，測定された伝達関数から明らかなため，測定対象周波数領域内で従来通りのカーブフィットを行い，その結果を初期値として用いる。しかしながら後者については，測定された伝達関数を見る限りでは何の情報も得ることができない。そこで，まず伝達関数の測定データ及び領域内モードのカーブフィットによって得られた初期値から次のような２乗誤差関数を作成する。

$$\lambda=\sum_{i=1}^{l}\left[\left[MR_i-IR_i-\sum_{r=1}^{p}\frac{\{1-(\omega_i/\Omega_r)^2\}/K_r}{\{1-(\omega_i/\Omega_r)^2\}^2+4\zeta_r^2(\omega_i/\Omega_r)^2}\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[MI_i-II_i-\sum_{r=1}^{p}\frac{-2\zeta_r\omega_i/\Omega_r/K_r}{\{1-(\omega_i/\Omega_r)^2\}^2+4\zeta_r^2(\omega_i/\Omega_r)^2}\right]^2\right] \qquad (3)$$

ここで，λは２乗誤差関数，MR_i，MI_iは測定された伝達関数の実部及び虚部，IR_i，II_iは領域内モードの初期値から再構成された伝達関数の実部及び虚部，Ω_r，ζ_r，K_rはそれぞれ領域外第rモードの固有角振動数，減衰比，等価剛性，lはデータ数，pは領域外モードの数である。

次にこの２乗誤差関数λを最小とするΩ_r，ζ_r，K_rを求めることにより，領域外モードの初期値が得られる。

２乗誤差関数λを最小とするパラメータを求める問題は，いわゆる最適化問題に相当する。最適化問題には様々な解法が存在するが，ここでは手法の簡便さから，逐次シンプレックス探索法にネルダー・ミードの加速法を援用して[4),5)]パラメータを算出することとした。

以上で領域内及び領域外モードの初期値が得られ，これをもとに再度カーブフィットを実施し，測定点の数に等しいモーダルパラメータが得られる。

2・3　システム同定

測定点の数に等しい数のモーダルパラメータが求められると，比例粘性減衰を仮定した場合には，直交性から各特性行列が次式によって算出される。

$$
\begin{aligned}
[M] &= ([\Phi_0]^T)^{-1}[m_0][\Phi_0]^{-1} \\
[C] &= ([\Phi_0]^T)^{-1}[c_0][\Phi_0]^{-1} \\
[K] &= ([\Phi_0]^T)^{-1}[k_0][\Phi_0]^{-1}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

ここで，［M］，［C］，［K］はそれぞれ質量行列，減衰行列，剛性行列，$[m_0]$，$[c_0]$，$[k_0]$はそれぞれモード質量行列，モード減衰行列，モード剛性行列，$[\Phi_0]$は固有ベクトル行列である。

なお，$[\Phi_0]$及び$[k_0]$はカーブフィットによって得られた等価剛性から求められ，これに次式を適用することで，$[m_0]$及び$[c_0]$が決定される。

$$m_r = \Omega_r / k_r, \qquad c_r = 2 m_r \Omega_r \zeta_r \qquad (5)$$

ここで，rはモード次数，m_r，c_r，k_rはそれぞれモード質量，モード減衰，モード剛性である。

3　解析結果及び考察

3・1　3自由度モデルによる解析

図4のような比例粘性減衰3自由度系モデル（$m_1 = m_2 = m_3 = 10Ns^2/m$，$k_1 = k_2 = k_3 = 2 \times 10^6 N/m$，$\alpha = 0$，$\beta = 5 \times 10^{-6}$）を対象に，前節で示した解析を数値シミュレーションによって実行する。対象が一端を固定された3自由度系のため，モデルの振動は3つのモードをもち，その固有角振動数と減衰比の厳密解は表1に示されるとおりである。測定対象周波数領域を0－100Hzにとり，モード1，2を領域内モード，モード3を領域外モードとする。解析に使用する伝達関数データは，周波数分解能0.25Hz，データ数400として作成した。

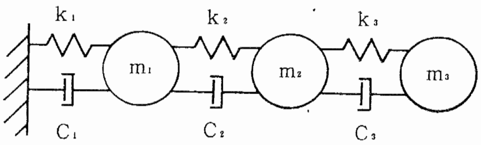


図4　比例粘性減衰3自由度系モデル

表1　3自由度系モデルの固有角振動数及び減衰比

＊単位 rad／sec

r	1	2	3
Ω_r*	1.990287×10^2	5.576657×10^2	8.058494×10^2
ζ_r	4.975721×10^{-4}	1.394167×10^{-3}	2.014632×10^{-3}

以下に例として質量m_1の駆動点伝達関数に本手法を適用した結果を示す。

図5は領域内モードの初期値を得るために，測定対象周波数領域（0－100Hz）内で通常の偏分反復法を行った結果である。細部で生ずる若干のずれは，すでに述べたように領域外モードを近似項で表したことに起因するものである。

次に偏分反復法で得られた領域内モードの初期値と0－100Hzまでの伝達関数データから2乗誤差関数（式(3)）を作成し，これを最小とするモーダルパラメータを逐次シンプレックス探索法によって求める。その結果得られた値が領域外モードの初期値になる。なお領域外モードの探索の開始点は，固有振動数については測定対象周波数領域が100Hzまでのため100Hzとし，減衰比及び等価剛性については領域内モードと同じオーダー（減衰比1×10^{-3}，等価剛性1×10^6）に設定している。

ここまでで得られた全初期値をもとに，再合成された伝達関数と質量m_1の駆動点伝達関数との比較を図6に示す。この段階では領域外モードを近似項ではなく伝達関数形で求めているため，領域内の適合状況は見掛け上改善されている。しかしながら領域外モードのピークには，ずれが生じている。これは3・2で述べるように，領域外モードの初期値を計算する際に作成する2乗誤差関数に，最初の偏分反復法で得られた

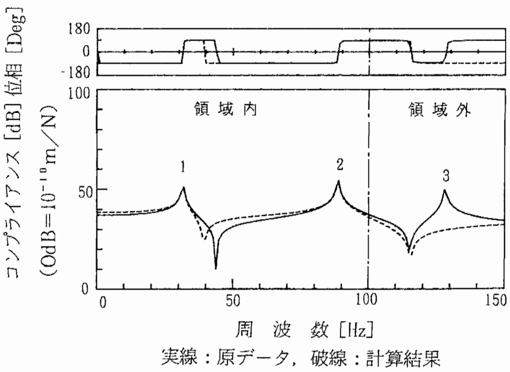
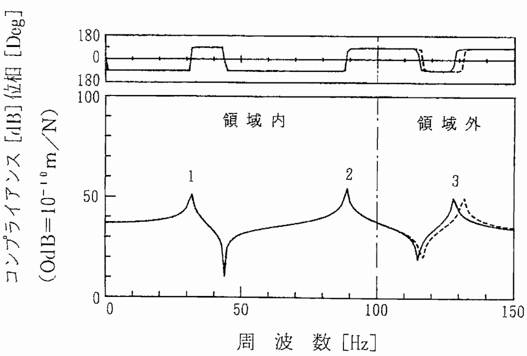
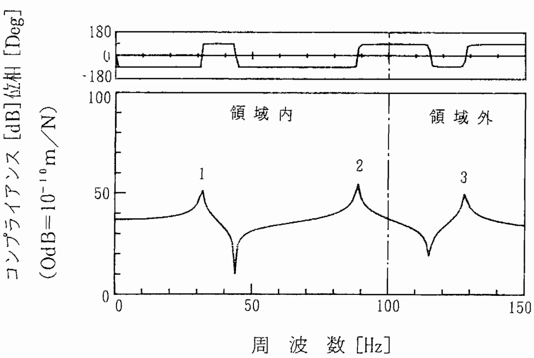


図5　領域内モード（1，2）初期値による伝達関数



実線：原データ，破線：計算結果

図6　領域内及び領域外モードの初期値による伝達関数



実線：原データ，破線：計算結果

図7　領域内及び領域外モードのカーブフィット結果

初期値が用いられているため，この初期値の誤差とシンプレックス探索時の誤差が重畳したことによるものと考えられる。

次に，得られた全初期値を用いて再度偏分反復法を実行する。その結果得られた領域内モード（モード1，2)及び領域外モード(モード3）のモーダルパラメータを用いて再合成された伝達関数と質量m_1の駆動点伝達関数との比較を図7に示す。両者は細部まで一致しており，領域内外モードの正確なモーダルパラメータが得られていることがわかる。

システム同定を実行する際には図4のモデルの場合，たとえば質量m_1の駆動点伝達関数及び質量m_1-m_2間，質量m_1-m_3間の相互伝達関数の計3つの伝達関数に対しカーブフィットを行う必要がある。しかしながら，理論上固有振動数及び減衰比はグローバルなパラメータであるため，領域内モード及び領域外モードの初期値を求める計算は，どれかひとつの伝達関数について実行すればよい。従って，計算時間は短くて済むことになる。

表2は本解析方法によって得られた質量m_1の駆動点伝達関数及び質量m_1-m_2間，質量m_1-m_3間の相互伝達関数の等価剛性を示したものであるが，これは図4のモデルから理論的に計算された値と厳密に一致していた。

最後に，表2に示した等価剛性に式(4)，(5)を適用してシステム同定を行った結果，得られた各特性行列を表3に示す。これは図4のモデルの特性行列とよく一致しており，十分な精度でシステム同定が行われたことがわかる。

表2　等価剛性計算結果

単位　N／m

	1－1	1－2	1－3
K_1	3.682333×10^6	2.043540×10^6	1.638792×10^6
K_2	5.725875×10^6	1.286592×10^7	-7.140047×10^6
K_3	1.859179×10^7	-1.490946×10^7	3.350125×10^7

表3　特性行列同定結果

質量行列（単位 Ns^2／m）

$$\begin{bmatrix} 1.000003\times10^{1} & -1.144608\times10^{-5} & 1.304619\times10^{-6} \\ -1.145025\times10^{-5} & 1.000003\times10^{1} & -9.526089\times10^{-6} \\ 1.308417\times10^{-6} & -9.524326\times10^{-6} & 1.000001\times10^{1} \end{bmatrix}$$

減衰行列（単位 Ns／m）

$$\begin{bmatrix} 2.000007\times10^{1} & -1.000005\times10^{1} & 1.196062\times10^{-5} \\ -1.000005\times10^{1} & 2.000007\times10^{1} & -1.000004\times10^{1} \\ 1.196565\times10^{-5} & -1.000004\times10^{1} & 1.000002\times10^{1} \end{bmatrix}$$

剛性行列（単位 N／m）

$$\begin{bmatrix} 4.000001\times10^{6} & -2.000000\times10^{6} & -2.758622\times10^{-1} \\ -2.000000\times10^{6} & 3.999999\times10^{6} & -1.999999\times10^{6} \\ -2.756886\times10^{-1} & -1.999999\times10^{6} & 1.999999\times10^{6} \end{bmatrix}$$

3・2　初期値決定時の誤差について

偏分反復法を実行する際に必要な初期値は，各モードの固有振動数と減衰比である。このうち減衰比については，同一構造物上であれば一般に各モードともほぼ近い値になることから，初期値の決定もさほど困難ではない（たとえば領域内モードと等しいオーダーで適当な数値を選択し，それを初期値として用いる）。しかしながら，領域外モードの固有振動数については全く情報がないため，何らかの方法でこれを決定しなければならない。そこで本稿ではその方法として，２乗誤差関数を最小とするパラメータを逐次シンプレックス探索法によって求める方法を採用した（２・２参照）。この方法によれば，２乗誤差関数を作成する際に用いる領域内モードの初期値が正解値に近いほど，領域外モードの良好な初期値を得ることができ，一方，領域内モードの初期値は領域外モードの影響が少ないほど正解値に近くなると考えられる。従って領域外モードの初期値は，領域内モードに及ぼす領域外モードの影響が少ないほど良好な値になるものと推測される。

そこで本節では図４のモデルを対象に，領域内モードに及ぼす領域外モードの影響と，逐次シンプレックス探索法によって得られる領域外モード固有振動数計算値との関係を調べた。

領域内モードに及ぼす領域外モードの影響については，領域内モードの初期値を決定する際に得られる剰余コンプライアンス項の大小で表されると考えられるため，領域外モードを徐々に高域へ移動することで剰余コンプライアンス項を減少させ，領域外モードの影響を低下させることとした。

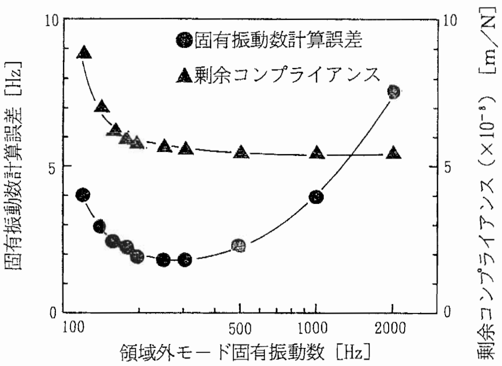


図８　領域外モード固有振動数と固有振動数計算誤差との関係

図８は，図４に示した３自由度系モデルの質量m_1の駆動点伝達関数について，領域外モード（モード３）の固有振動数だけを数値上で120－2000Hzまで変化させた場合に，逐次シンプレックス探索法で得られた固有振動数計算値と正解値との差を計算誤差として示したものである。また，あわせて剰余コンプライアンス項の値を示している。

この図から領域外モードの固有振動数がほぼ250Hzまでは，剰余コンプライアンス項の減少（すなわち領域内モードに及ぼす領域外モードの影響の低下）とともに計算誤差は減少し，当初予想した通りの傾向が現れていることがわかる。しかしながら，それ以上の周波数になると逆に計算誤差は増加する傾向にある。これは図９に示したように領域外モードが測定対象周波数領域に対して高域にあればあるほど，領域内のデータに含まれる領域外モードの影響は周波数軸に対して一定の値に近づくため（すなわち，周波数軸に平行な直線となるデータから，曲線を近似することになる），逐次シンプレックス探索法を行う際に大きな誤差が生ずることによる傾向であると考えられる。

従って，図８にみられる計算誤差の傾向は，250Hz以下が主として偏分反復法で得られた初期値に含まれる（領域外モードの影響による）誤差に起因するものであり，それ以上の帯域については主に逐次シンプレックス探索法によって生ずる誤差に起因するものと推測される。

以上の結果から，領域外モードの初期値を逐次シンプレックス探索法によって求める場合には，初期値をほぼ正確に求めうる周波数の上限が存在し，従って求めうる領域外モードの数もある程度制限を受けるものと考えられ，使用にあたっては注意する必要があるといえよう。

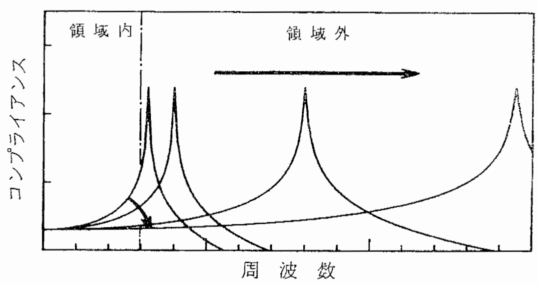


図９　領域外モードの高域移行に伴う領域内データの変化

4 結　語

測定対象周波数領域の外側のモードを推定することにより，測定点の数に等しいモーダルパラメータを求めてシステム同定を行う手法を開発し，シミュレーションデータに適用した結果，良好な同定を行いうることが明らかになった。しかしながら，本稿でカーブフィット時に用いた偏分反復法及び領域外モードの初期値決定時に用いた２乗誤差関数に対する逐次シンプレックス探索法は，本手法に対して必ずしも最適なものとはいえない。特に後者については，領域内モードの初期値の精度に大きく影響されるとともに，測定対象周波数領域よりも比較的高域にあるモードに対しては誤差が急激に増大するなどの問題点を有している。従って，今後は領域外モードの推定を，より簡便かつ高精度に行いうる手法を開発していく必要があると考えられる。

文　　献

1）大久保信行：機械のモーダルアナリシス，中央大学出版部，1982.

2）長松昭男：モード解析，培風館，1985.

3）たとえば，
鄭義峰ら：特性行列の実験的決定による系の同定，日本機械学会論文集（C編），**54**（497），93〜99，1988.

4）近藤次郎：最適化法，コロナ社，1984.

5）L. C. W. ディクソン：非線形最適化計算法，培風館，1974.